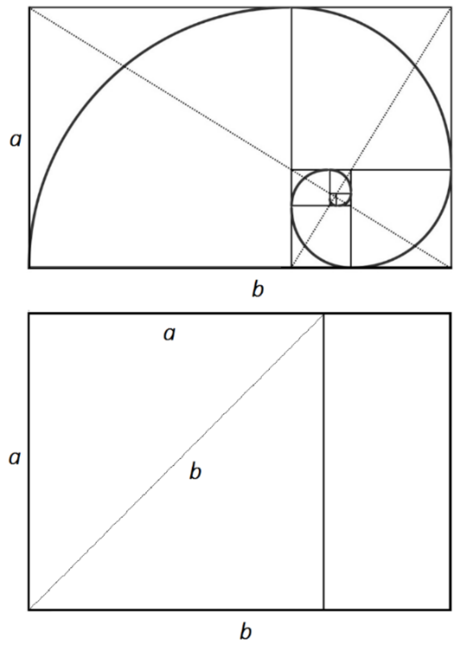
Due rettangoli notevoli



$$b = a\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$b = a\sqrt{2}$$

In questa breve nota consideriamo due particolari forme rettangolari, di uso molto comune, per indagarne le proprietà, che possono essere fatte notare anche a dei bambini, senza necessariamente ricorrere alle loro proprietà numeriche.

1. Il foglio A4

In tutte le occasioni più comuni la carta più usata per quaderni, carta per fotocopie o stampe, carta da lettere, è data da fogli in formato “A4” (21x29,7 *cm*). Perché la scelta, fra tutte le possibili forme rettangolari, è caduta proprio su questo tipo di rettangolo?
Nella figura seguente vengono riportati (in scala) i vari formati A0, A1, A2, A3, A4, A5 usati in tipografia. Ognuno è la metà del precedente, ma tutti questi formati sono dati da rettangoli **simili**: il rapporto fra i due lati di questi rettangoli è sempre lo stesso.

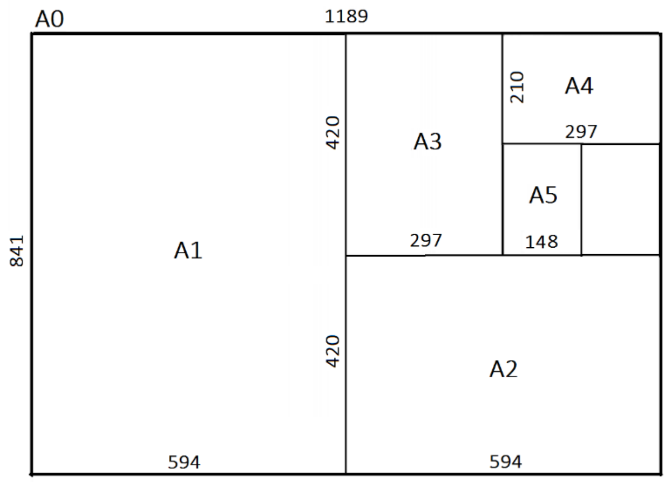


Fig. 1 I formati AX e le loro misure (in *cm*)

Questa è la particolarità del rettangolo A4 (e anche degli altri "AX"): quando lo dividiamo a metà, i due rettangoli ottenuti sono simili a quello di partenza.

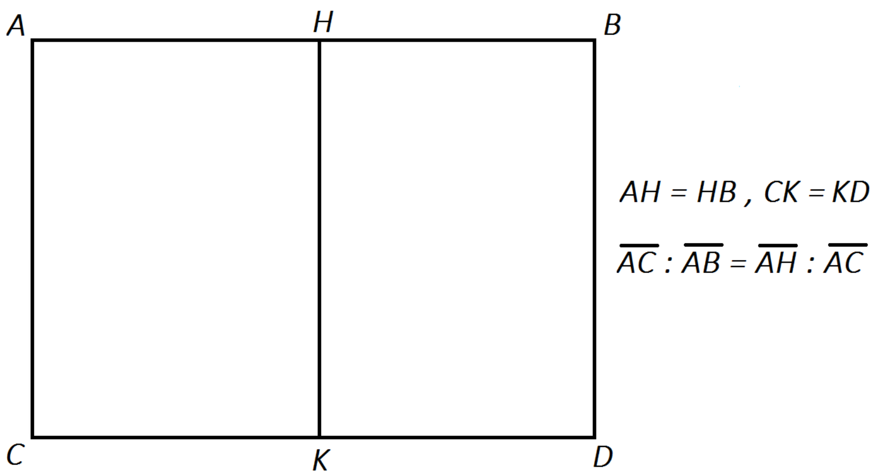


Fig. 2 Proprietà del formato A4 quando diviso a metà

Qual è la condizione perché ciò accada? Detti a e b i due lati del rettangolo, con $a < b$, dovrà aversi: $a : b = b/2 : a$; allora $a^2 = b^2/2$, cioè $2a^2 = b^2$, e quindi $b = a\sqrt{2}$.

Notiamo che, poiché $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale (pari a 1,4142...), in effetti le misure dei vari fogli AX hanno un rapporto che approssima tale numero, come si può vedere in Fig.1 .

Si può poi notare, vedi Fig.2, che poiché $\sqrt{2}$ è il rapporto fra la misura del lato di un quadrato e quella della sua diagonale, allora avremo che, detti *AC* e *AB* i suoi lati, il lato più lungo, diciamo *CD*, ha la stessa lunghezza della diagonale *CE* del quadrato *ACEF*.

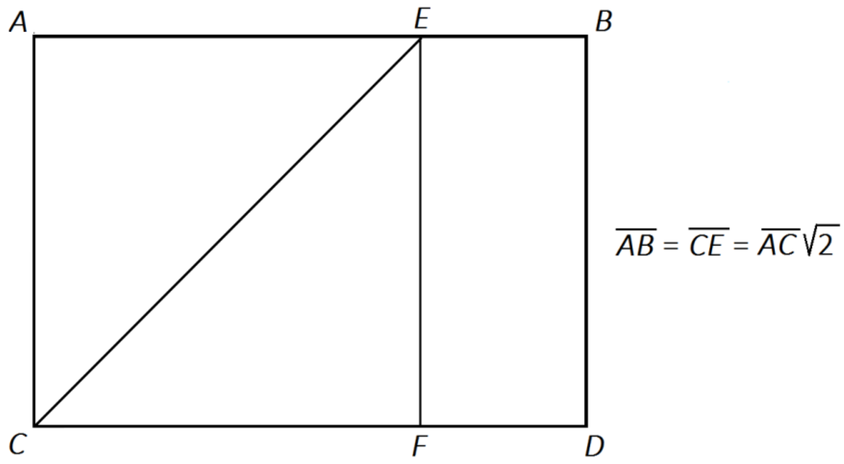


Fig.3 Lato maggiore *CD* del rettangolo A4 uguale alla diagonale *CE* del quadrato sul lato minore

Ciò si può semplicemente verificare piegando un foglio A4 lungo *CE* (portando *AC* sul lato *CD*, a coincidere con *CF*) e comparando il lato *CE* con il lato di un altro foglio dello stesso formato.

C'è un grande vantaggio tipografico nell'adottare questo formato; supponiamo che si abbia da fare un manifesto, delle locandine e dei volantini per uno stesso evento; si potranno usare i formati A1, A3 e A5 rispettivamente per i tre scopi, ma l'immagine per ognuno di essi può essere la stessa, basta ingrandirla o rimpicciolirla nella scala desiderata.

2. Il "rettangolo aureo"

Il secondo tipo di rettangolo che considereremo è quello che nella Grecia classica era considerato quello "esteticamente perfetto", il più gradevole all'occhio. Ad esempio questo rettangolo individua la forma della facciata del Partenone di Atene, forse il più famoso tempio greco (vedi Fig. 4).

Fig. 4 Il Partenone e il rettangolo aureo

Le proprietà geometriche di questo rettangolo sono diverse da quelle già viste per il formato A4: nel rettangolo aureo si richiede che, detti a e b i suoi lati (con $a < b$), si abbia che se tracciamo nel rettangolo il quadrato di lato a, la parte rimanente del rettangolo sia ancora simile al rettangolo stesso (Fig. 5).

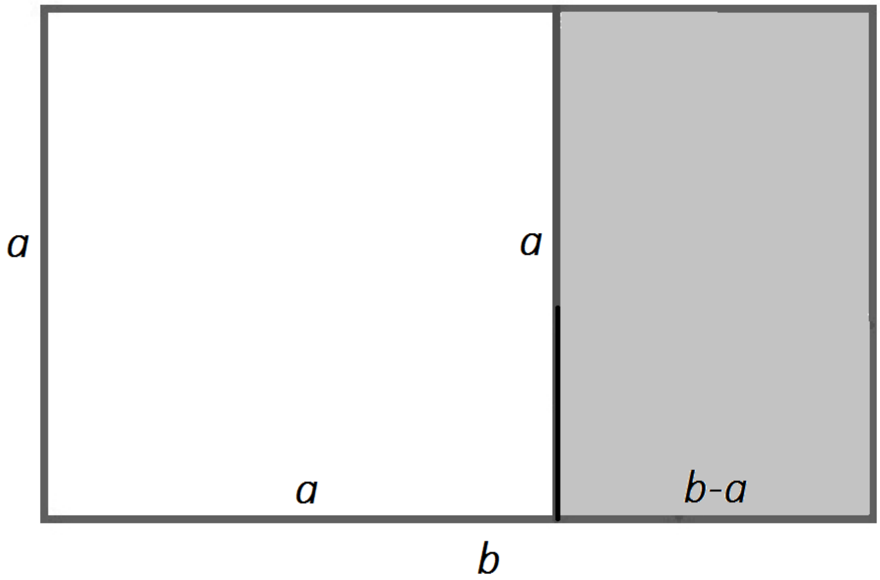


Fig. 5 Il rettangolo aureo (la parte in grigio è simile all'intero rettangolo)

Se ripetiamo questa costruzione nel rettangolo più piccolo e poi ancora in quello rimanente, e così via, otteniamo una figura nella quale i vertici dei vari quadrati sono uniti da una spirale:

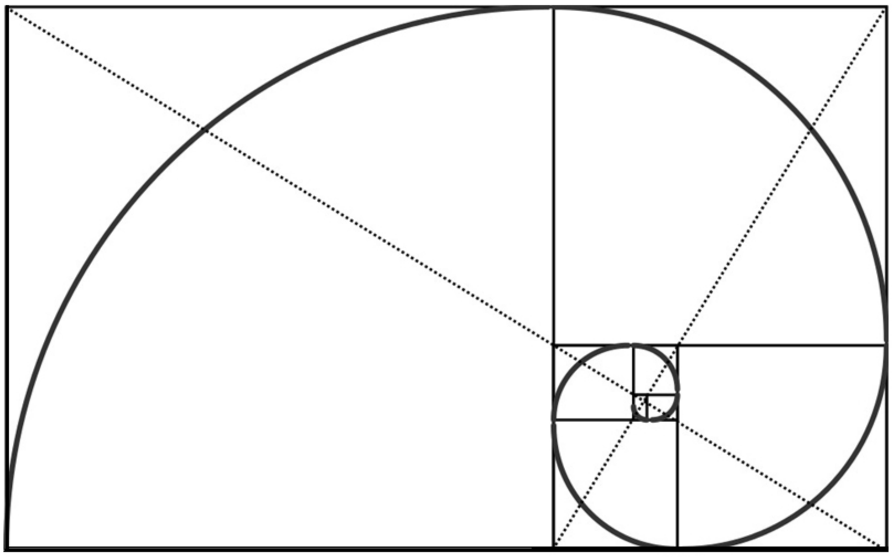


Fig. 6 La spirale nel rettangolo aureo

Possiamo inoltre notare che se dividiamo in due parti uguali il rettangolo più piccolo che compare in questa figura e ne prendiamo i lati come unità di misura (vedi in Fig. 7), allora le misure dei lati dei vari quadrati che compaiono sono date dai numeri di Fibonacci (vedi sezione 3.6 del libro), infatti ognuna di esse è la somma delle due precedenti, come si vede nella figura seguente.

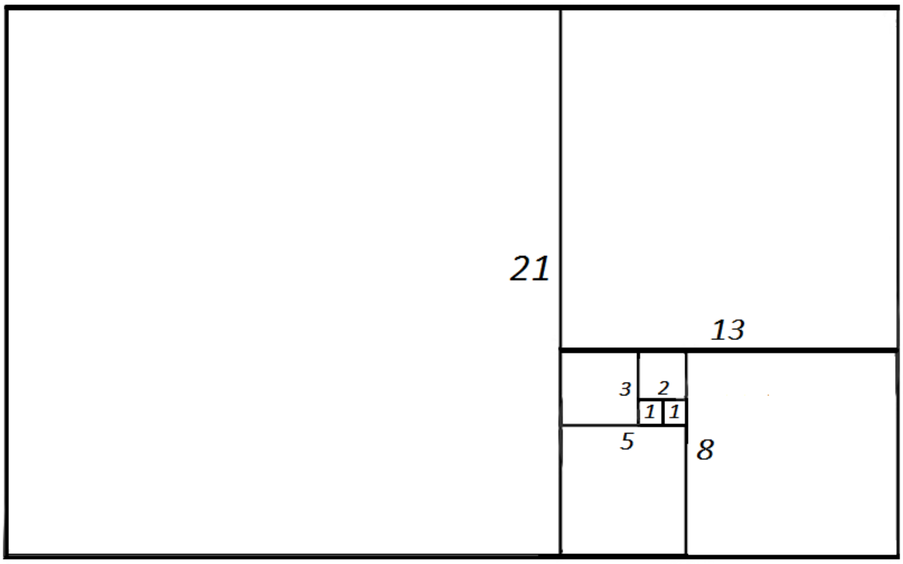


Fig. 7 Numeri di Fibonacci nel rettangolo aureo

Se cerchiamo quale sia il rapporto fra i due lati a e b di un rettangolo aureo, abbiamo che essi devono soddisfare la proporzione (vedi Fig. 5):

$$a : b = (b - a) : a \quad ; \text{ quindi } \quad a^2 = b(b - a) = b^2 - ba$$

abbiamo allora:

$$b^2 - ba - a^2 = 0 \,,$$

da cui si ricava (usando la formula per le equazioni di secondo grado) che

$$b = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{a \pm a\sqrt{5}}{2} \;;$$

e infine, scartando la soluzione negativa che non corrisponde ad un dato geometrico, si ha:

$$b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\, a \;;$$

cioè, con buona approssimazione:

$$b = 1{,}618\, a \,.$$

Questo ci permette di trovare un'altra proprietà geometrica del rettangolo aureo: consideriamo la seguente figura:

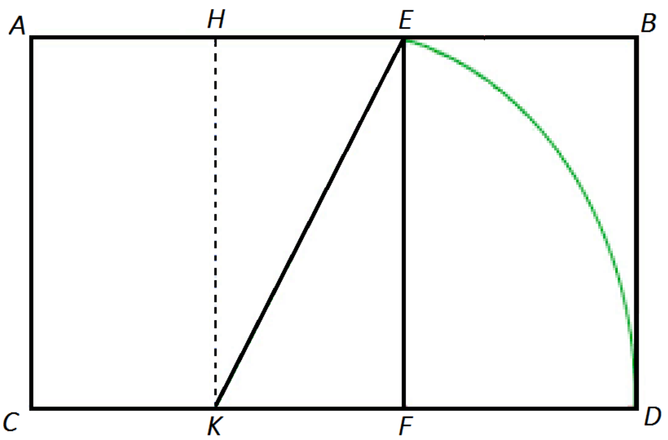


Fig. 8 Altra proprietà geometrica del rettangolo aureo: *EK* = *KD*.

Abbiamo diviso il quadrato *AECF* a metà con il segmento *HK*, e andiamo a considerare la diagonale *EK* del rettangolo *HEKF* così ottenuto. Vogliamo mostrare che *EK* è congruente al segmento *KD*. Per ottenere ciò, mostriamo che *CK+EK* è congruente a *CD* (= *CK + KD*).
Usando a e b per le misure di *AC* e *CD*, come fatto precedentemente, e c per la misura di *EK*, avremo, usando il teorema di Pitagora su *KEF*: $c^2 = a^2 + (a/2)^2 = a^2 + a^2/4 = 5/4\, a^2$.
Quindi:

$$c = \frac{\sqrt{5}}{2}\, a\,;$$

e allora

$$CK + EK = \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{5}}{2}a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, a = b = CD\,,$$

Da cui si ha $EK = KD$.

Notiamo infine che, poiché questo tipo di rettangolo (almeno secondo la tradizione), è quello più gradevole all’occhio, questo formato è stato scelto per un uso “aureo” in senso economico:

Fig. 9 Un rettangolo aureo davvero “Gold”

Il rettangolo aureo è infatti il formato delle nostre carte di credito (e di tanti altri biglietti, carte di affiliazione, etc…).